



Instructions for authors, subscriptions and further details:

<http://redimat.hipatiapress.com>

## **Solving Problem Types and Levels of Proportional Reasoning in Initial Training of Mathematics Teachers**

Verónica Díaz<sup>1</sup>, María Aravena<sup>1</sup>

1) Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Chile.

2) Universidad Católica del Maule, Chile

Date of publication: October 24<sup>th</sup>, 2021

Edition period: October 2021-February 2022

---

**To cite this article:** Díaz, V., and Aravena, M. (2021). Solving problem type and levels of proportional reasoning in initial training of mathematics teachers *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 10(3), 296-317. doi: [10.17583/redimat.7125](https://doi.org/10.17583/redimat.7125)

**To link this article:** <http://dx.doi.org/10.17583/redimat.7125>

---

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

The terms and conditions of use are related to the Open Journal System and to [Creative Commons Attribution License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (CCAL).

# **Solving Problem Types and Levels of Proportional Reasoning in Initial Training of Mathematics Teachers**

Verónica Díaz  
*Universidad de Los Lagos*

María Aravena  
*Universidad Católica del Maule*

*(Received: 26 November 2020; Accepted: 18 October 2021;  
Published: 24 October 2021)*

## **Abstract**

---

This article aims to determine and analyze the performance of future high school mathematics teachers in solving problem types and levels of proportional reasoning. The research is descriptive with quantitative methodology with a sample of twenty-five students from a university in Chile. Data are collected through an open response problem test on applications of proportionality. The results reveal students' capacity to solve routine problems, preferably of purely mathematical context and to a lesser extent, fantasist, but with high difficulty in solving non-routine problems and problems of real context. The additive level category is the most widely used, which demonstrates the prevalence of pre-proportional reasoning without achieving the proportional level category that includes the performance of students who use proportional relationships among all data to obtain the correct answer.

---

**Keywords:** Solving problem; proportional reasoning; proportionality, types of problems; higher education

# Resolución de Tipos de Problemas y Niveles del Razonamiento Proporcional en Formación Inicial de Profesores de Matemática

Verónica Díaz  
*Universidad de Los Lagos*

María Aravena  
*Universidad Católica del Maule*

*(Recibido: 26 Noviembre 2020; Aceptado: 18 Octubre 2021;  
Publicado: 24 Octubre 2021)*

## Resumen

---

Este artículo tiene como objetivos determinar y analizar el desempeño de los futuros profesores de matemática de enseñanza secundaria en la resolución de tipos de problemas y los niveles del razonamiento proporcional. La investigación es descriptiva con metodología cuantitativa con una muestra de veinticinco estudiantes de una Universidad en Chile. Los datos se recopilan a través de una prueba de problemas de respuesta abierta sobre aplicaciones de la proporcionalidad. Los resultados develan capacidad de los estudiantes para resolver problemas rutinarios, preferentemente de contexto puramente matemático y en menor grado, fantasista, pero con alta dificultad en la resolución de problemas no rutinarios y de contexto real. La categoría de nivel aditivo es la mayormente utilizada, lo que demuestra la prevalencia del razonamiento pre-proporcional sin lograr alcanzar la categoría de nivel proporcional que incluye el desempeño de los estudiantes que usan relaciones proporcionales entre todos los datos para obtener la respuesta correcta.

---

**Palabras clave:** Resolución de problemas, razonamiento proporcional, tipos de problemas, proporcionalidad, enseñanza superior.

Muchos investigadores y educadores han resaltado las características similares de las situaciones de proporción y cómo esto puede servir para ayudar a los estudiantes a desarrollar sus habilidades de razonamiento proporcional (NCEE, 2013; Sitomer et al., 2012). El razonamiento proporcional es una forma importante de pensamiento matemático y la base sobre la cual se construyen altos niveles de conocimiento matemático en otros dominios (De la Torre, Tjoe, Rhoads y Lam, 2013).

Por su parte, Lamon (2007) asegura que el razonamiento proporcional es fundamental para las matemáticas. Según Frith y Lloyd (2016) muchos estudiantes pueden proporcionar una respuesta numérica correcta a un problema de proporciones utilizando conocimientos mecánicos o procedimientos algorítmicos, lo que no significa que razonaron proporcionalmente. Aunque la comprensión de la razón y la proporción está entrelazada con muchos temas matemáticos, la esencia del razonamiento proporcional es la comprensión de la estructura multiplicativa de situaciones proporcionales (Burgos, Castillo, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino, 2020; Dole, Clarke, Wright y Hilton, 2012; Silvestre y Ponte, 2011; Burgos y Godino, 2019).

A pesar de su importancia, existen múltiples evidencias de la dificultad de los estudiantes de distintos niveles educativos, para resolver problemas de proporcionalidad, evidenciándose la tendencia a dar respuestas proporcionales o aditivas independiente del tipo de problema (Fernández y Llinares, 2012). De ello se concluye que las dificultades tienen su origen en el desarrollo del razonamiento proporcional y/o en la enseñanza deficiente del objeto matemático proporcionalidad (Baldera, Block y Guerra, 2014; Ramírez y Block, 2009).

Los estudios sobre razonamiento proporcional han demostrado que la estrategia aditiva es la estrategia de error más utilizada por ellos cuando resuelven problemas proporcionales (Duatepe, Akkus y Kayhan, 2005; Van Dooren, De Bock, Vleugels y Verschaffel, 2010; De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, 2007).

En el ámbito de la enseñanza superior y específicamente en la formación de profesores, se observa un mayor interés en el desarrollo de investigaciones relativas al estudio del conocimiento matemático y didáctico considerado necesario para enseñar la proporcionalidad (Lo, 2004; Rivas, Godino y Castro, 2012). Existen evidencias empíricas que el razonamiento proporcional sigue

siendo problemático para muchos estudiantes universitarios (Harries y Botha, 2013; Frith y Lloyd, 2016; Ben-Chaim, Ilany y Keret, 2012). Otros estudios corroboran los resultados de que estudiantes de pregrado e incluso docentes, tienen problemas en los temas de razón, proporción y fracciones reductoras (Çalışıcı, 2018; Bingölbali y Özmantar, 2010; Kaplan, İşleyen y Öztürk, 2011; Ekawati, Lin y Yang, 2018). Polito (2014) en su trabajo sobre la comunicación de los estudiantes universitarios sobre los porcentajes, indica que el lenguaje es a menudo impreciso y confuso. Del mismo modo, Rivas, Godino y Castro (2012) indican que el razonamiento proporcional tanto en el ámbito de la formación inicial de los docentes de matemática como en los profesores en ejercicio, constituyen una dificultad que se traduce en la comprensión y enseñanza de ñas razones y proporciones.

A nivel curricular, de acuerdo a Obando, Vasco y Arboleda (2014) si bien se reconoce la valoración de los ejes temáticos de las razones, proporciones y proporcionalidad, estos continúan siendo un problema tanto para su enseñanza como para su aprendizaje, sin lograr consolidarse propuestas de cómo y cuándo abordarlos en los contextos escolares (Pontón, 2012; Hersant, 2005; Adjage y Pluvinage, 2007). Una alternativa es abordar esta problemática en la formación de profesores de matemática, proporcionándoles una instrucción académica pertinente, que les permita afrontar con herramientas matemáticas y didácticas, la compleja tarea de enseñar los ejes temáticos referidos.

En el currículo escolar en Chile, la enseñanza de los conceptos de razón y proporción se inicia en el séptimo grado de la educación básica, insertos por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), en la unidad de Números y Operaciones. En el octavo grado, se establece en la unidad de Números y Álgebra, la enseñanza de la proporcionalidad y problemas que la involucren (MINEDUC, 2013). Para la enseñanza superior, existen los Estándares Orientadores para egresados de Pedagogía en Educación Básica. En ellos, se incluyen extensamente los conceptos de razón, proporción, proporcionalidad, haciendo hincapié en la resolución de problemas (MINEDUC, 2011). No así, en los Estándares Orientadores para Carreras de Educación Media, que prácticamente no contempla su enseñanza (MINEDUC, 2012).

A pesar de la importancia del razonamiento proporcional en las matemáticas escolares, poco se exige a los futuros profesores de secundaria respecto a su enseñanza y desarrollo como habilidad, y poco se ha escrito sobre los conocimientos necesarios para que los profesores enseñen el

razonamiento proporcional en relación con su importancia (Weiland, Orril, Nagar, Brown y Burke, 2020).

Dada la escasa o nula investigación en futuros profesores de matemática para secundaria en Chile, el 2017 los autores Díaz y Poblete (2018) realizaron una primera incursión de investigación en una cohorte de estudiantes de formación inicial de profesores, en el curso de matemática básica. Como resultado, se verificaron muy bajos niveles de logro en la resolución de tipos de problemas en proporcionalidad, sumado a la imposibilidad de los estudiantes en lograr llegar al nivel de razonamiento proporcional categorizado como máximo. Todo lo anteriormente descrito, justifica la presente investigación para la siguiente cohorte 2019 de futuros profesores de matemática en la enseñanza secundaria.

## **Objetivos**

Los objetivos formulados para este estudio son determinar y analizar tanto el desempeño académico, como los niveles de razonamiento proporcional mediante la resolución de tipos de problemas de los estudiantes de formación inicial en matemática de secundaria. Se asocian a estos objetivos, la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son los niveles de razonamiento proporcional mayormente utilizados por los futuros profesores de matemática cuando resuelven problemas de diferentes tipos?

## **Referentes Teóricos**

Las actuales Reformas Educativas en Iberoamérica, orientan sus acciones al mejoramiento de la calidad pedagógica de la educación matemática. En el contexto de la enseñanza superior en Chile, se han acompañado de diversos esfuerzos por encontrar las vías que se asegure el avance en transformaciones viables, eficaces y duraderas que enriquezcan y renueven las prácticas pedagógicas a través de los Estándares Orientadores para egresados de Pedagogía en Educación Media o Secundaria.

Aunque ostensiblemente a los estudiantes de este nivel se les ha enseñado el razonamiento proporcional en la formación escolar previa a la superior, buscamos investigar la capacidad de los futuros profesores de matemática,

cuando se ven enfrentados a tipos de problemas contextualizados y no a ejemplos resueltos.

El marco teórico que se utilizó en esta investigación se construyó bajo dos pilares, por una parte, el razonamiento proporcional de los autores Karplus, Pulas y Stage (1983), y por otro, la clasificación de tipos de problemas de los autores Díaz y Poblete (2001).

## Razonamiento Proporcional

La interpretación de razonamiento proporcional se basa en general en las definiciones de proporción, que a su vez depende de cómo se definen la proporción y la razón. Si bien existieron desacuerdos entre ambos términos, se llegó a la interpretación más convencional de Vergnaud (1983), para quien la razón es una comparación de dos cantidades con medidas similares, mientras que la proporción es una comparación de dos cantidades con medidas diferentes (De la Torre et al., 2013). Según Avcu y Avcu (2010), el razonamiento se puede definir como el proceso de considerar todos los factores y llegar a una conclusión racional. Karplus, Pulas y Stage (1983) definen el razonamiento proporcional como razonamiento en un sistema de dos variables relacionadas por una función lineal. En el presente estudio, se adoptó esta última definición.

Por otra parte, en la literatura, existen muchas clasificaciones sobre los tipos de respuestas correctas e incorrectas asociadas a la resolución de problemas de proporcionalidad. Para efectos de esta investigación, hemos estimado utilizar una adaptación de los autores Karplus, Pulas y Stage (1983) para describir los niveles de razonamiento proporcional y clasificar el rendimiento de los estudiantes en cuatro grandes categorías.

Tabla 1.

### *Niveles del razonamiento proporcional*

Categorías	Descripciones
Categoría 1 (Nivel incompleto, ilógico)	Esta categoría incluye el rendimiento de estudiantes que no brindan explicaciones, usan los datos de manera ilógica, o usan operaciones cuantitativas de manera inapropiada.
Categoría 2 (nivel cualitativo)	Esta categoría contiene el rendimiento de los estudiantes que justifican sus respuestas utilizando los términos

Tabla 1. (cotinúa)

*Niveles del razonamiento proporcional*

Categorías	Descripciones
Categoría 3 (nivel aditivo)	datos y los comparan usando expresiones cualitativas como más, menos o equivalente. Esta categoría incluye el rendimiento de los estudiantes que obtienen la respuesta aplicando sustracción a las cantidades dadas.
Categoría 4 (nivel proporcional)	Esta categoría incluye el rendimiento de los estudiantes que usan relaciones proporcionales entre todos los datos para obtener la respuesta correcta.

## Resolución de Problemas

Las pruebas internacionales como PISA y TIMSS en las que Chile participa, le permiten monitorear la evolución del progreso educativo del sistema escolar en base a referentes internacionales. Ambas pruebas incluyen la resolución de problemas en su formato evaluativo. Los problemas de razonamiento proporcional constituyen uno de los problemas de desempeño de los estudiantes chilenos en ambas evaluaciones internacionales (OECD, 2019; TIMSS, 2016).

A pesar de la importancia concedida al desarrollo de esta habilidad y de la exigencia de resolver problemas enmarcados en contextos matemáticos o de la vida real, en la práctica es muy poco probable que los alumnos tengan la oportunidad de abordarlos (Díaz y Poblete, 2017). Según Cáceres y Chamoso (2015), los estudiantes tienen la percepción que cuando resuelven problemas en matemática, a los docentes sólo les importa el resultado del problema.

Estamos cierto que los problemas proporcionan los medios a través de los cuales un alumno puede adquirir nuevas habilidades, y luego comenzar a aplicar estas habilidades a problemas que no hayan encontrado previamente (Renkl, 2014; Van Gog y Rummel, 2010; Bentley y Yates, 2017) como los no rutinarios (Díaz, 2020). Por otra parte, a juicio de Mesa, Wladis y Watkins (2014) los contextos matemáticos aún no están ampliamente representados en la literatura de la educación matemática de la educación universitaria, ni tampoco en el aprendizaje de las matemáticas de los adultos.

## Clasificación de los Problemas

Varios autores destacan la importancia de incorporar en la resolución de problemas, tipos de problemas matemáticos. A partir de esta idea, se han investigado (Pino, 2015) y desarrollado en el tiempo, clasificaciones para el currículo escolar, por ejemplo, basadas en el procedimiento, en el número de soluciones posibles, en la adaptación de los datos dados, etc. (Blum y Niss, 1991; Blanco, 1993; Vila, 1995; Díaz y Poblete, 2001; Vila y Callejo, 2004).

Aunque existen varias clasificaciones, creemos que el contexto es un componente fundamental en la estructura de un problema, y ese contexto es la aplicación o conocimiento al que se refiere el problema. Según De la Cruz (2013) los problemas de proporción a menudo se distinguen por su contexto. Se ha demostrado que el contexto de un problema influye en las estrategias de solución y las tasas de éxito de los estudiantes. La clasificación utilizada en la presente investigación está basada en tipos de problemas de Díaz y Poblete (2001) y considera la naturaleza y el contexto.



Figura 1. Tipos de problemas.

**Naturaleza del problema.** Basados en su naturaleza, los problemas se definen como Rutinarios y No Rutinarios.

Los problemas Rutinarios son similares a los resueltos durante los cursos de instrucción; el estudiante sigue una secuencia que implica entender los conceptos y algoritmos para alcanzar soluciones válidas.

Un problema será No Rutinario cuando un estudiante no conoce una respuesta ni un procedimiento previamente establecido o rutina, para encontrarla. Ejemplo:

**Contexto del problema.** Basados en su contexto, los problemas se definen como: real, realista, fantasista y puramente matemático.

(1) *Problema de contexto real:* Un contexto es real si se produce efectivamente en la realidad y compromete el accionar del alumno en la misma. Ejemplo: “Mide con un hilo el diámetro y la longitud de la circunferencia en tres monedas de distinto tamaño. Establece la razón entre el diámetro y la longitud de cada moneda. ¿qué puedes concluir de estas razones?”

(2) *Problema de contexto realista:* Un contexto es realista si es susceptible de producirse realmente. Se trata de una simulación de la realidad o de una parte de la realidad. Ejemplo: “Ayer 2 camiones transportaron frutas desde el mercado hasta la frutería. Hoy 3 camiones, iguales a los de ayer, tendrán que hacer 6 viajes para transportar la misma cantidad de frutas desde el mercado a la frutería. ¿Cuántos viajes tuvieron que hacer ayer los camiones?”

(3) *Problema de contexto fantasista:* Un contexto es fantasista si es fruto de la imaginación y está sin fundamento en la realidad. Ejemplo: “Un tren espacial dedicado al turismo sale de la estación central en la Tierra con  $x$  pasajeros. En la primera detención en Marte bajan  $0,2x$  pasajeros y suben 50. ¿Qué fracción representan los pasajeros que quedan en el tren después de esta primera detención, respecto de los que salieron de la estación central en la Tierra?”

(4) *Problema de contexto puramente matemático:* Un contexto es puramente matemático si hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos: números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc. Ejemplo: “Los lados de dos cuadrados tienen una proporción de 1: 3. ¿Cuál es la razón de sus perímetros?”

## Metodología

La investigación corresponde a un estudio de carácter descriptivo con enfoque cuantitativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Su ejecución contempla tres momentos desarrollados, a su vez, en tres sesiones de trabajo: (a) elaboración y aplicación de material didáctico con planteamiento de problemas que requerían razonamiento proporcional para su resolución; (b) diseño y aplicación de un instrumento evaluativo basado en tipos de

problemas según naturaleza y contexto; (c) análisis de las resoluciones de los problemas evaluados.

## Participantes

El universo de estudio son los futuros profesores de matemática de secundaria, enmarcados en la asignatura de Matemática Básica, correspondiente al primer semestre de una carrera profesional en una Universidad en Chile, cohorte 2019. Para la selección de la muestra se consideró la técnica de muestreo no probabilístico, dado que los participantes fueron seleccionados de forma intencionada. Los criterios para la selección fueron: a) cursar primer semestre de Pedagogía en Matemática y b) participar voluntariamente del estudio. De este modo la muestra quedó constituida por el 89,2 % de la población, es decir, 25 sujetos de estudio.

## Recolección de los Datos

**Primer momento.** Esta etapa realizada en un horario adicional a las clases regulares correspondió a la primera sesión del estudio. En ella, se les entregaron a los estudiantes materiales didácticos diseñados por los investigadores, con situaciones y problemas basados en los tipos de problemas clasificados según su naturaleza y contexto, problemas de razón, series proporcionales, proporcionalidad directa, inversa y compuesta. También se plantearon situaciones problemas que presentaban datos insuficientes, problemas de valores faltantes, incluso problemas en los que el esquema era claramente inapropiado.

Los estudiantes trabajaron individualmente y en grupos de acuerdo a su elección, y pudieron hacer preguntas a los investigadores/observadores participantes. Una sesión típica comenzó con estudiantes leyendo un problema y discutiendo de qué se trataba, luego procedían a resolverlo con su propio modelo de solución, incluyendo en algunos casos representaciones gráficas.

**Segundo momento.** En esta segunda fase, se elaboró y aplicó la prueba de resolución de tipos de problemas de proporcionalidad y de respuesta abierta, que requerían razonamiento proporcional.

Un panel de ocho expertos examinó la validez aparente y las cualidades de relevancia, equilibrio y especificidad. Se estableció la validez del contenido, con un grado de concordancia del 90% entre los jueces, que coincidieron en

mantener las cinco dimensiones de habilidades blandas y de los 15 ítems originales, la versión final quedó reducida a diez problemas de aplicaciones de la proporcionalidad directa, inversa y compuesta, idóneos al nivel. También se validó por constructo, con el objetivo de explorar la prueba y averiguar si las relaciones entre las dimensiones de habilidades blandas, definen una estructura dimensional en la prueba de resolución de tipos de problemas, que se mantenga invariante y pueda servir de base para la interpretación de los resultados en distintas poblaciones. Se utilizó el análisis factorial confirmatorio (Ferrando y Anguiano-Carrasco, 2010)

Los problemas fueron previamente piloteados de tal manera que, la prueba quedó compuesta por 10 problemas de respuesta abierta, elaborada según la clasificación de Díaz y Poblete (2001) que consideran tipos de problemas matemáticos según su naturaleza y contexto. En su versión final, incluyó 2 problemas de contexto real, 2 de contexto realista, 2 de contexto fantasista, 2 de contexto puramente matemático y 2 problemas no rutinarios. Fue resuelta de manera individual durante 2 horas y 30 minutos.

Se comprobó la consistencia interna del instrumento, mediante el coeficiente de Kuder Richardson-20 que resultó igual a 0,79. Se realizó un análisis detallado de los problemas incluyendo la dificultad y la discriminación de cada uno. La dificultad promedio fue 0,43 y la discriminación promedio 0,46.

La evaluación del desempeño de los estudiantes se consideró en relación al grado de avance en la resolución de problemas matemáticos, y se estimó de acuerdo al modelo de Rasch, adaptado por Díaz y Poblete (2019). A este modelo se le asocia una escala de cinco puntos, que indican los niveles de progreso de los estudiantes hacia la solución correcta del problema. Esta escala de puntajes registra cada detalle en el intento de los alumnos en encontrar la solución.

Tabla 2.  
*Escala de Puntajes*

Puntaje	Etapas de la solución
0	No comienzo. El estudiante es incapaz de comenzar el problema o entrega un trabajo que no tienen significado alguno.
1	Enfoque. El estudiante enfoca el problema con un trabajo significativo, indicando una comprensión del problema, pero encuentra rápidamente una dificultad.

Tabla 2. (continúa)  
Escala de Puntajes

Puntaje	Etapas de la solución
2	Substancia. Suficientes detalles demuestran que el estudiante se ha orientado hacia una solución racional, pero errores importantes o interpretaciones erróneas impiden el proceso de resolución correcta.
3	Resultado. El problema está casi resuelto, algunos pequeños errores conducen a una solución final errada.
4	Completación. El método apropiado ha sido utilizado y ha producido una solución correcta.

**Tercer momento.** Esta última fase involucró un proceso formativo, por tal razón, se resolvieron con los estudiantes los problemas propuestos en la prueba. Se realizaron análisis de las resoluciones de cada problema, con debate grupal sobre las respuestas del problema. Todo ello con la participación de los investigadores/observadores.

## Resultados

### Desempeño en la resolución de tipos de problemas

A continuación, en la Figura 2 se muestran los porcentajes según las etapas de solución, obtenidos en el análisis de las respuestas individuales de los estudiantes con el modelo de Rash, en la prueba de resolución de tipos de problemas rutinarios de contexto real, realista, fantasista y puramente matemático, y en los problemas no rutinarios sobre proporcionalidad.

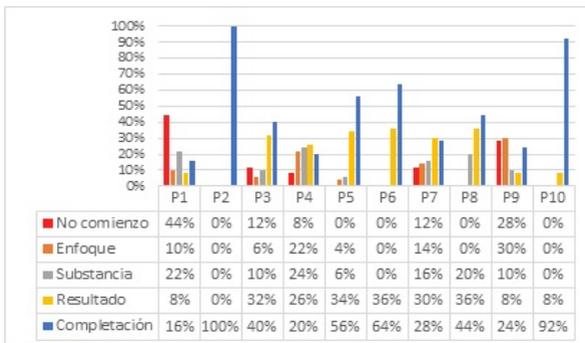


Figura 2. Porcentaje por etapas de la solución.

A continuación, en la Figura 3 presentamos, los porcentajes de desempeño de los estudiantes según los tipos de problemas.

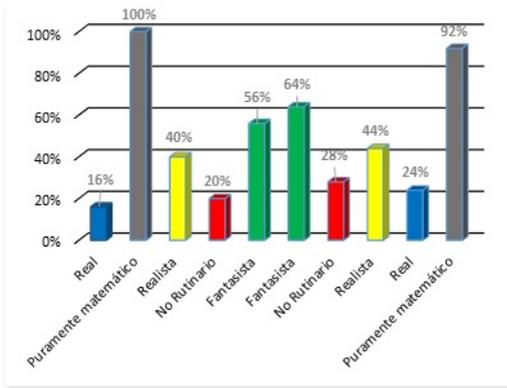


Figura 3. Desempeño en tipos de problemas.

De acuerdo con los resultados, el desempeño que se exhibe en general es regular y en promedio sólo alcanza un 48,4 % de respuesta correcta en la prueba. Lo anterior configura un grupo de futuros docentes con discreta capacidad de resolución de problemas con aplicaciones de la proporcionalidad. Los problemas de muy buen desempeño son los rutinarios de contexto puramente matemático 2 (P2) y 10 (P10). También los dos problemas rutinarios de contexto fantasista P5 y P6, lograron altos porcentajes de logro.

Los problemas de menor desempeño corresponden al P1 rutinario de contexto real y al P4 no rutinario. A continuación, se presentan ambos problemas y un ejemplo de su resolución en las Figuras 4 y 5 respectivamente.

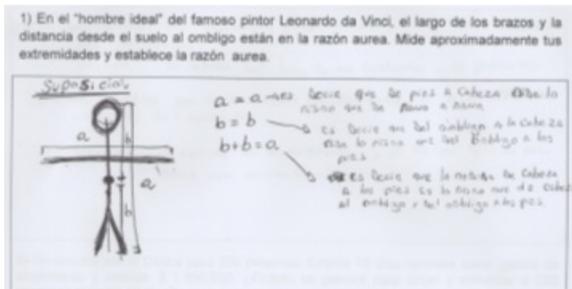


Figura 4. Resolución de un estudiante al problema rutinario de contexto real

De acuerdo con la respuesta del estudiante, para hacer la comparación, se aprecia una suposición en la que establece relaciones de igualdad basado en el vínculo de la altura del cuerpo en dos segmentos iguales a  $b$ , los que a su vez igualó con  $a$ , como la medida de los brazos abiertos. Estableció la distancia entre ciertas regiones, pero no la razón media correspondiente al cociente entre la altura total del cuerpo y la distancia desde el suelo hasta el ombligo, que corresponde a la razón aurea. La respuesta se encuentra en el nivel del razonamiento proporcional de la categoría 2 (Tabla 3).

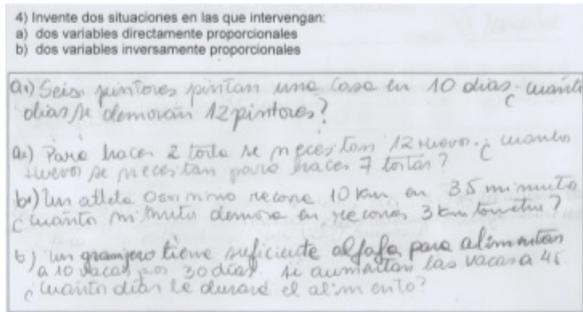


Figura 5. Resolución de un estudiante al problema no rutinario

El estudiante demostró razonamiento hipotético deductivo que le permitió utilizar una relación matemática (razón) y a partir de ésta deducir una segunda relación también matemática (proporción) lo cual indica que tuvo comprensión del uso técnico de la regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa e inversa, por tanto, logró describir situaciones de la vida cotidiana que están relacionadas proporcionalmente, y además diferenciar una de otra. Los problemas 2 y 3 propuestos por el estudiante se caracterizan por ser proporcional, con valor faltante, medidas enteras. Los problemas restantes, se caracterizan por ser proporcional, valor faltante y razón de cambio enteros en el primero y razón fraccionaria en el último.

## Niveles de razonamiento proporcional

A continuación, en la Tabla 3 se muestra la distribución de las categorías de niveles del razonamiento proporcional adoptadas de Karplus et al. (1983).

Tabla 3.

*Distribución de las categorías del razonamiento proporcional por problema*

Categorías	Problemas									
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	P <sub>7</sub>	P <sub>8</sub>	P <sub>9</sub>	P <sub>10</sub>
	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
Categoría 1 (nivel incompleto, ilógico)	11		3	2			3		7	
	44		12	8			12		28	
Categoría 2 (nivel cualitativo)	2		4	9	2		7	5	12	
	8		16	36	8		28	20	48	
Categoría 3 (nivel aditivo)	8		8	9	9	9	8	9		2
	32		32	36	36	36	32	36		8
Categoría 4 (nivel proporcional)	4	25	10	5	14	16	7	11	6	23
	16	100	40	20	56	64	28	44	24	92

En general se identifica una prominencia de respuesta asociada a la categoría 3 de nivel de razonamiento aditivo. De acuerdo con los resultados, en los dos problemas puramente matemáticos P2 y P10, prácticamente la totalidad de los estudiantes usaron relaciones proporcionales entre todos los datos para obtener la respuesta correcta, lo que corresponde a la categoría 4 de máximo nivel de razonamiento proporcional.

Los problemas de mayor complejidad por ser los menos abordados, fueron los no rutinarios y los rutinarios de contexto real. En lo que respecta al problema no rutinario P7, las dificultades se presentaron por la incapacidad de formular problemas con variables inversamente proporcionales y con datos faltantes. El problema real P1, en general no tuvo respuesta en un 44%, por falta de conocimiento del concepto razón aurea involucrado. Los procedimientos más frecuentes fueron los utilizados en la comparación de fracciones, procedimientos como la homogeneización de los denominadores y el algoritmo de multiplicación cruzada, con razonamientos aditivos que corresponden a la categoría 2 de nivel cualitativo de razonamiento. En consecuencia, encontramos que la mayoría de los errores estaban relacionados con la aplicación incorrecta de estos procedimientos.

Cabe hacer notar que en ambos problemas rutinarios de contexto fantasista, los que, de acuerdo con la definición, son fruto de la imaginación y no tienen

fundamente en la realidad, se constataron altos niveles de desempeños. A continuación, el P6 y la resolución de un estudiante.

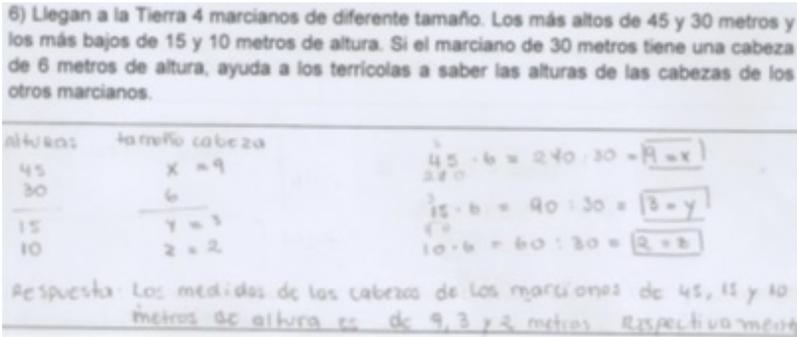


Figura 6. Resolución de un estudiante al problema rutinario de contexto6fantasista

El estudiante utiliza la estrategia de "suposición de razón equivalente", reconociendo implícitamente la invariancia de la relación entre el número total de alturas y de tamaño de las cabezas. La respuesta se basa en la división de cantidades. Para hacer una comparación, el estudiante encuentra el valor de cada relación. Demuestra un pensamiento relacional, ya que considera la relación multiplicativa entre cantidades. Él razona correctamente usando la regla de tres, porque él determina la condición numérica para hacer que las relaciones sean equivalentes. La respuesta satisface el nivel del razonamiento proporcional de la categoría 4.

### Discusión

Una de las características de la resolución de problemas es que los estudiantes pueden trabajar de manera flexible y pueden modificar las estrategias utilizadas según las circunstancias cambiantes. La flexibilidad del estudiante determina si puede adaptarse bien a nuevos problemas o problemas no rutinarios. Por otro lado, el contexto ofrece contacto con la realidad y la fantasía, y proporciona al aprendizaje de las matemáticas un sentido de utilidad.

A través de esta investigación, se hizo evidente que los estudiantes investigados, tienen habilidades para resolver problemas de aplicación de proporcionalidad directa, inversa y compuesta, pero no las suficientes. Esto se evidencia en los problemas no rutinarios, los cuales permitieron identificar las

dificultades a las que se enfrentan los estudiantes cuando deben formular ellos un problema, resolver problemas con datos faltantes o con relaciones no lineales. Este hallazgo se relaciona con lo que De Bock et al. (2007) denominan ilusión de linealidad. Modestou y Gagatsis (2007) proponen que la ilusión de la linealidad es un obstáculo epistemológico, de ahí su presencia continua incluso en estudiantes mayores como este grupo de futuros profesores. Las respuestas de los estudiantes denotan que la enseñanza previa de los estudiantes en secundaria sobre proporcionalidad muestra a la regla de tres como la herramienta con la que se puede resolver cualquier problema que involucre cuatro valores con uno faltante, en este uso indiscriminado coincidimos con los hallazgos de Mochón (2012) y de Fernández y Llinares (2012). También verificamos en la primera fase de este estudio, que cuando una prueba contiene problemas de palabras proporcionales y no proporcionales, los estudiantes sobre usan la proporcionalidad, coincidiendo con la investigación de Van Dooren, Bock, Evers y Verschaffel (2009) realizada en el nivel de primaria.

En cuanto a los niveles de razonamiento proporcional en la resolución de tipos de problemas, de acuerdo con las categorías del razonamiento proporcional, podemos indicar que la categoría 3 de nivel aditivo de razonamiento es la mayormente utilizada por los estudiantes. Esta situación demuestra la prevalencia del razonamiento pre-proporcional en las actuaciones de este grupo de futuros docentes. El análisis del conocimiento procedimental aplicado por los participantes muestra una fuerte influencia de los procedimientos y algoritmos relacionados con otros significados de fracciones no relacionadas con la sub-construcción de la razón. Estos resultados, coinciden con los mismos errores e ideas primitivas (razonamiento aditivo o la ilusión de linealidad) de los estudiantes secundarios que participaron en otros estudios que utilizaron tareas similares y fueron reportados por De Bock et al. (2007).

Lo anteriormente descrito, confirma que incluso los estudiantes con mayor nivel de escolaridad, aún no comprenden el contraste entre las relaciones aditiva y multiplicativa. Aunque aplican procedimientos correctos para resolver los problemas, los estudiantes claramente no reconocen la relación escalar o funcional entre las cantidades. Tampoco proporcionan argumentos matemáticos para establecer la relación de orden entre dos proporciones; simplemente establecen la relación de división del antecedente y consecuente para encontrar el valor de la relación. En general, prevalecen una serie de pasos de procedimiento en lugar de reconocimiento de las propiedades

estructurales de una proporcionalidad, lo que reduce significativamente el nivel del razonamiento proporcional que se esperaría en este grado de instrucción en la enseñanza superior, influyendo en la resolución de tipos de problemas según naturaleza y contexto.

La persistencia de las dificultades relativas a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la proporcionalidad, es una clara muestra de su complejidad subyacente, ya que de acuerdo con Lamon (2007), el que los estudiantes respondan con conocimientos mecanizados o procedimientos algorítmicos, no garantiza la utilización de razonamiento proporcional. A nuestro juicio, su comprensión va a pasar por utilizar el razonamiento, cuando son capaces de resolver, por ejemplo, problemas de la vida diaria o contextualizados a lo real, realista, fantasista y puramente matemático.

### Conclusiones

Del análisis del desempeño académico de los estudiantes de formación inicial en matemática, en la resolución de problemas, se puede inferir que es necesario incluir tipos de problemas que permitan contextualizar un contenido matemático específico, en este caso, proporcionalidad. Los discretos resultados de los estudiantes se pueden relacionar, además, con la falta de conocimiento, en la etapa previa al ingreso a la educación superior, de los conceptos de razón, proporción y tipos de proporcionalidad. Esto último, tiene directa relación con los docentes de secundaria en ejercicio, cuya formación disciplinar, se basa en los denominados Estándares Orientadores para Carreras de Educación Media (MINEDUC, 2012) que no contemplan su enseñanza.

Con el fin de analizar los niveles de razonamiento proporcional en la resolución de tipos de problemas, se incorporaron en este estudio problemas rutinarios de contexto fantasista. Es importante destacar el desempeño de los estudiantes en estos problemas, que prácticamente no se encuentran en la literatura de la enseñanza de la proporcionalidad, sin embargo, fueron muy abordados por los alumnos, porque además de ser diferentes, llamaron más su atención, facilitando la comprensión de los conceptos involucrados. Así como los problemas rutinarios de contexto puramente matemáticos, que hacen referencia a objetos matemáticos en los que habitualmente se trabaja la proporcionalidad a nivel escolar.

### Bibliografía

- Adjage R., y Pluvillage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 149-175. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9049-x>
- Avcu, R., y Avcu, S. (2010). 6th grade students' use of different strategies in solving ratio and proportion problems. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 9, 1277-1281. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.320>
- Balderas, R.G., Block, D., y Guerra, M.T. (2014). “Sé cómo se hace, pero no por qué”. Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria. *Educación Matemática*, 26(2), 7-32.
- Ben-Chaim, D., Keret, Y., y Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion: research and teaching in mathematics teachers' education*. Rotterdam: Sense Publisher.
- Bentley, B., y Yates, G. (2017). Facilitating proportional reasoning through worked examples: Two classroom-based experiments. *Cogent Education*, 4(1). <https://doi.org/10.1080/2331186X.2017.1297213>
- Bingölbali, E, y Özmantar, M.F. (2010). *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri*. Ankara: Pegem Akademi.
- Blanco, L.J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Epsilon*, 25, 49-60.
- Blum, W., y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications and links to others subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68. <https://doi.org/10.1007/BF00302716>
- Burgos, M., Castillo, M.J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J.D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema*, 34(66), 40-68. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03>
- Burgos, M., y Godino, J.D. (2019). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *Bolema*, 33(63), 389-410. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a19>
- Cáceres, M.J., y Chamoso, J.M. (2015). La evaluación sobre la resolución de problemas en matemáticas. En L.J. Blanco, J.A. Cárdenas, y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas en matemáticas en la formación inicial*

- de profesores de primaria* (pp.225-241). Cáceres, España: Universidad de Extremadura.
- Çalışıcı, H. (2018). Middle school students' learning difficulties in the ratio-proportion topic and a suggested solution: Envelope technique. *Universal Journal of Educational Research*, 6(8), 1848-1855. <https://doi.org/10.13189/ujer.2018.060830>
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement* (Mathematics Education Library). New York: Springer.
- De la Cruz, J. (2013). Selecting proportional reasoning tasks. *Australian Mathematics Teacher*, 69(2), 14-18.
- De la Torre, J., y Tjoe, H., Rhoads, K., y Lam, D. (2013). Conceptual and theoretical issues in proportional reasoning. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, 6(1), 21-38.
- Díaz, V. (2020). Difficulties and performance in mathematics competences: solving problems with derivatives. *International Journal of Engineering Pedagogy*, 10(4), 35-53. <https://doi.org/10.3991/ijep.v10i4.12473>
- Díaz, V., y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, 45, 33–41.
- Díaz, V., y Poblete, A. (2017). A model of professional competences in mathematics and didactic knowledge of teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(5), 702-714. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1267808>
- Díaz, V., y Poblete, A. (2019). Competencias matemáticas: Desempeño y errores en la resolución de problemas de límites. *Paradigma*, 40, 358-383
- Dole, S., Clarke, D., Wright, T., y Hilton, G. (2012). Students' proportional reasoning in mathematics and science. En T. Tso (Eds.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 2, pp. 195-202). Taipei, Taiwan: PME.
- Duatepe A., Akkus-Cikla O., y Kayhan M. (2005). Orantisal akil yurutme gerektiren sorularda ogrencilerin kullandiklari cozum stratejilerinin soru turlerine gore degisinin incelenmesi. *Hacettepe Universitesi Egitim Fakultesi Dergisi*, 28(28), 73-81.
- Ekawati, R. Lin, F., y Yang, K. (2018). The enactment of mathematics content knowledge and mathematics pedagogical content knowledge in teaching practice of ratio and proportion: A case of two primaries. En IOP Publishing (Eds.), *Proceedings in the 2nd Annual Applied Science and*

- Engineering Conference* (vol. 288, pp. 012122). Bandung, Indonesia: AASEC.
- Fernández, C., y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, [en línea], 30(1),129-142.
- Ferrando, P.J. y Anguiano-Carrasco, C. (2010). El análisis factorial como técnica de investigación en Psicología. *Papeles del Psicólogo*, 31(1), 18-33.
- Frith, V., y Lloyd P. (2016). Investigating proportional reasoning in a university quantitative literacy course. *Numeracy*, 9(1). <https://doi.org/10.5038/1936-4660.9.1.3>
- Harries, C., y Botha, J. (2013). Assessing medical students' competence in calculating drug doses. *Pythagoras*, 34(2), 1–9.
- Hernández, R, Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6.ª Edición). México DF: Mc Graw Hill.
- Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Revue Repères IREM*, 59, 5-41.
- Kaplan, A., İşleyen, T., y Öztürk, M. (2011). Sınıf oran orantı konusundaki kavram yanlışları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 19(3), 953-968.
- Karplus, R., Pulas, S., y Stage, E.K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 219–233. <https://doi.org/10.1007/BF00410539>
- Lamon, S.J. (2007). Rational number and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research. En F.K. Lester (Eds.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Lo, J.J. (2004). Prospective elementary school teachers' solution strategies and reasoning for a missing value proportion task. En M.J. Høines, y A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.3, pp. 265-272). Bergen, Norway: PME.
- McIntosh, M.B. (2013). *Developing proportional reasoning in middle school students*. (Thesis Masters of Mathematics). University of Utah.
- Mesa, V., Wladis, C., y Watkins, L. (2014). Research problems in community college mathematics education: Testing the boundaries of K-12 research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45, 173 – 193.

- Ministerio de Educación de Chile MINEDUC (2011). *Estándares orientadores para egresados de carreras de pedagogía en educación básica. Estándares pedagógicos y disciplinarios*. Santiago: LOM Ediciones Ltda.
- Ministerio de Educación de Chile MINEDUC (2012). *Estándares orientadores para carreras de educación media. Estándares pedagógicos y disciplinarios*. Santiago: LOM Ediciones Ltda.
- Ministerio de Educación de Chile MINEDUC (2013). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*. Santiago: LOM Ediciones Ltda.
- Mochon, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, 24(1), 133-157.
- Modestou, M., y Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, 27(1), 75-92. <https://doi.org/10.1080/01443410601061462>
- National Center on Education and the Economy NCEE. (2013). *What does it really mean to be college and work ready? the mathematics and english literacy required of first year community college students*. Washington, DC: NCEE.
- Obando, G., Vasco, C.E., y Arboleda, L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 59 - 81.
- OECD (2019). *PISA 2018 Results. (Volume I): What students know and can do*. OECD: Publishing, Paris.
- Perihan, A., y Mustafa, P. (2015). 6th grade students' solution strategies on proportional reasoning problems. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 197, 113-119. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.07.066>
- Pino, J. (2015). Tipos de problemas de matemáticas. En L.J. Blanco, J.A. Cárdenas, y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas en matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria* (pp.187-207). Cáceres, España: Universidad de Extremadura.
- Polito, J. (2014). The language of comparisons: Communicating about percentages. *Numeracy* 7(1), Article 6. <http://dx.doi.org/10.5038/1936-4660.7.1.6>
- Pontón, T. (2012). *La comprensión de enunciados de problemas en la enseñanza y el aprendizaje inicial de los números racionales*. (Trabajo fin de Doctorado). Universidad del Valle, Colombia.

- Ramírez, M., y Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación Matemática*, 21(1), 63-90.
- Renkl, A. (2014). *Learning from worked examples: How to prepare students for meaningful problem solving applying science of learning in education: Infusing psychological science into the curriculum*. Washington, DC: American Psychological Association.
- Rivas, M.A., Godino, J.D. y Castro, W.F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema*, 26(42B), 559-588. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200008>.
- Silvestre, A.I., y Ponte, J.P. (2011). Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 137-158.
- Sitomer, A., Ström, A., Mesa, V., Duranczyk, I.M., Nabb, K., Smith, J., y Yannotta, M. (2012). Moving from anecdote to evidence a proposed research agenda in community college mathematics education. *MathAMATYC Educator*, 4(1), 35-40.
- Trends in Mathematics and Science Study TIMSS (2015). Result in mathematics. En I.V.S., Mullis, M. Martin, P. Foy, y M. Hooper (Eds.), *TIMSS 2015 International result in mathematics*. Boston College: Chestnut Hill MA.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M., y Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: how numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*. 40(2).
- Van Dooren, W., De Bock, D., y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication ... and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360-381. <https://doi.org/10.1080/07370008.2010.488306>
- Van Gog, T., y Rummel, N. (2010). Example-based learning: Integrating cognitive and social-cognitive research perspectives. *Educational Psychology Review*, 22, 155-174. <https://doi.org/10.1007/s10648-010-9134-7>
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh, y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York, NY: Academic Press.
- Vila, A. (1995). ¿Problemas de matemáticas? ¿Para qué? una contribución al estudio de las creencias de profesores/as y alumnos/as. *Actas de la VII*

JAEM (pp.32-37). Madrid, España: Sociedad madrileña de profesores de matemáticas.

Vila, A., y Callejo, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea.

Weiland, T., Orrill, C.H., Nagar, G.G., Brown, R, y Burke, J. (2020). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*. <https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0>

**Verónica Díaz** es profesora de didáctica de la matemática en el Departamento de Ciencias Exactas, de la Universidad de Los Lagos, Chile.

**María Aravena** es profesora de didáctica de la matemática en la Universidad Católica del Maule, Chile.

**Dirección de contacto:** La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. **Dirección Postal:** Universidad de Los Lagos, Edificio Lago Maihue, A. Fuschlocher, 1305 Osorno, Chile. **Email:** [mvdiaz@ulagos.cl](mailto:mvdiaz@ulagos.cl)